

Séminaire

Sébastien Macé

29 décembre 2024

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Le système SIR	1
1.2	Équations cinétiques	3
2	Approche cinétique	3
2.1	Modélisation	3
2.2	La distribution des contacts sociaux	4
2.3	Mise à l'échelle	6
3	Dynamique macroscopique	8
3.1	Dérivation de systèmes basés sur les moments	8
3.2	Modèle social avec taux d'incidence saturé	9

1 Introduction

Les mesures de contrôle prises par les gouvernements pendant la pandémie de SARS-CoV-2 ont fourni des données expérimentales permettant de confronter les modélisations mathématiques à des données réelles. Ce travail a permis aux méthodes de contrôle et de prévention des épidémies d'évoluer et de montrer que la distribution des contacts entre les individus est un facteur aussi important que les paramètres de transmission. Cette observation nous incite à étudier le modèle épidémiologique SIR au travers de la sociabilité des individus.

1.1 Le système SIR

Considérons la propagation d'une épidémie au sein d'une population de taille N . On note $S(t)$ la taille de la population susceptible d'être infectée au temps t , $I(t)$ celle de la population infectée et $R(t)$ celle de la population rétablie. On suppose que les personnes rétablies sont immunisées et le reste au cours du temps. On note β le taux d'infection effectif et γ le taux d'infectés qui se rétablissent. Le modèle SIR de Kermack et McKendrick pour l'épidémie s'écrit alors [1]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S(t) = -\beta S \frac{I}{N} \\ \frac{d}{dt} I(t) = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I \\ \frac{d}{dt} R(t) = \gamma I. \end{cases} \quad (1)$$

La figure 1 illustre l'évolution du système. On appelle reproductivité $\mathcal{R}_0$ le nombre moyen de cas secondaires qu'une personne infecte au début de l'épidémie. Dans notre cas, on a $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma}$.

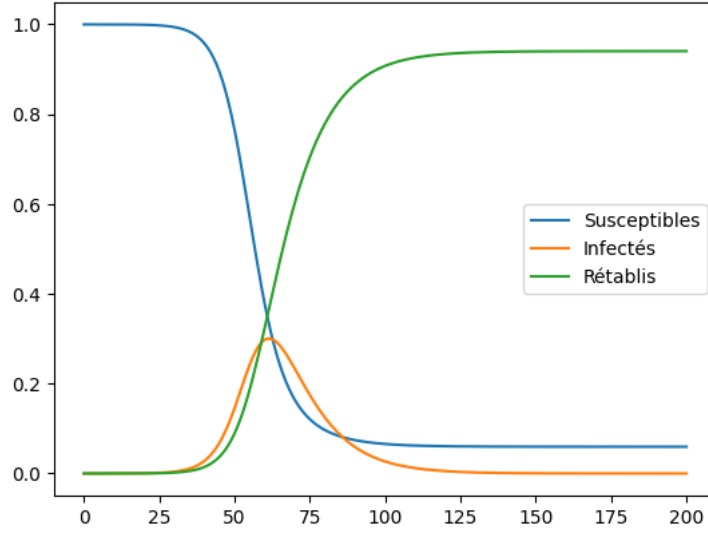


FIGURE 1 – Évolution des fractions des compartiments du système SIR pour $\beta = 0.3$ et $\gamma = 0.1$.

Cependant, ce modèle présente certaines limites. Le manque d'états pour décrire les individus peut être corrigé en ajoutant des compartiments supplémentaires pour mieux représenter de nouveaux états, comme dans le modèle SEIR décrit dans [1], où sont inclus les individus exposés mais non contagieux.. On peut aussi observer qu'à l'échelle de la France, les individus ne constituent pas une population homogène. On peut citer [3] pour l'idée de diviser la population en plus petits paquets auxquels le modèle est appliqué avant d'établir des interactions entre ces paquets.

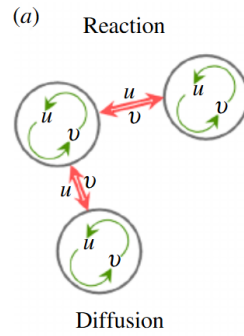


FIGURE 2 – Division en sous-modèle à l'aide d'un réseau

Une autre limite du modèle est de considérer que tous les individus sont identiques, alors qu'en réalité leurs sociabilités diffèrent et dépendent d'eux-mêmes et de l'avancée de l'épidémie. On s'intéresse alors à un point de vue cinétique de l'évolution.

1.2 Équations cinétiques

En théorie cinétique des gaz, les molécules sont modélisées comme des particules en mouvement aléatoire, interagissant entre elles par des collisions. Chaque molécule est définie par sa position x et sa vitesse v , dont l'évolution est influencée par les collisions. Leurs densités sont décrites par une fonction de distribution $f(v, x, t)$ représentant la densité de probabilité de trouver une molécule avec une vitesse v et une position x à un instant donné t .

L'évolution de cette fonction est gouvernée par l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f),$$

où :

- $v \cdot \nabla_x f$ représente le transport des particules dans l'espace
- $Q(f, f)$ est l'opérateur de collision, décrivant les changements de f dus aux interactions entre particules.

Cet opérateur de collision est un terme non linéaire qui intègre toutes les interactions binaires locales entre molécules, permettant de modéliser les échanges d'énergie et de quantité de mouvement. À partir de cette description microscopique, on peut dériver des propriétés macroscopiques comme la pression, la température ou la densité du gaz, par le calcul des moments de la fonction $f(v, x, t)$. Cette approche statistique relie ainsi les comportements individuels des molécules aux lois globales de la thermodynamique.

Dans notre cadre du modèle SIR, la dynamique des populations épidémiologiques peut être reformulée en termes d'équations cinétiques. Les individus remplacent les molécules et sont représentés par une distribution $f(x, t)$, où x correspond au nombre de contacts sociaux d'un individu à un instant donné t . L'évolution des distributions des compartiments susceptibles ($f_S(x, t)$), infectés ($f_I(x, t)$) et rétablis ($f_R(x, t)$) suit des équations cinétiques analogues à l'équation de Boltzmann, mais adaptées aux interactions sociales :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_S(x, t) = -K_\epsilon(f_S, f_I)(x, t) + Q_S(f_S)(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} f_I(x, t) = K_\epsilon(f_S, f_I)(x, t) - \gamma_\epsilon f_I(x, t) + Q_I(f_I)(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} f_R(x, t) = \gamma_\epsilon f_I(x, t) + Q_R(f_R)(x, t) \end{cases} \quad (2)$$

où Q_J modélise les transferts entre compartiments et les modifications de sociabilité dues aux interactions. Ces équations modélisent les « collisions sociales », où les interactions entre individus influencent leur sociabilité et leur état épidémiologique.

Ainsi, tout comme la théorie cinétique des gaz relie les interactions microscopiques aux propriétés globales d'un fluide, l'approche cinétique appliquée au système SIR permet de connecter les comportements individuels en termes de contacts sociaux aux dynamiques collectives d'une épidémie.

2 Approche cinétique

2.1 Modélisation

Nous allons nous intéresser au système SIR du point de vue des contacts sociaux. Pour cela, on étudie des distributions f_S , f_I et f_R qui prennent deux variables positives x et t . La variable t désigne le temps tandis que x désigne le nombre de contacts sociaux. La population totale est alors désignée par $f = f_S + f_I + f_R$ avec, pour tout $t \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}_+} f(x, t) dx = 1$. On définit les fractions

des populations susceptibles, infectées et rétablies par

$$J(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f_J(x, t) dx \text{ pour tout } J \in \{S, I, R\} \text{ et } t \geq 0.$$

On introduit le nombre moyen de contacts par $x(t) = \int_{\mathbb{R}_+} x f(x, t) dx$ et les moyennes locales par

$$x_J(t) = \frac{1}{J(t)} \int_{\mathbb{R}_+} x f_J(x, t) dx \text{ pour tout } J \in \{S, I, R\}.$$

Comme dans le cas du système SIR, l'évolution temporelle des distributions est donnée par des échanges entre les compartiments auxquels on ajoute un terme caractérisant la modification du nombre de contacts sociaux. Le système s'écrit alors selon [2]

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_S(x, t) = -K_\epsilon(f_S, f_I)(x, t) + Q_S(f_S)(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} f_I(x, t) = K_\epsilon(f_S, f_I)(x, t) - \gamma_\epsilon f_I(x, t) + Q_I(f_I)(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} f_R(x, t) = \gamma_\epsilon f_I(x, t) + Q_R(f_R)(x, t) \end{cases} \quad (3)$$

où

- $\epsilon \ll 1$ représente l'intensité des phénomènes épidémiologiques,
- γ_ϵ est une constante appelée taux de rétablissement,
- $K_\epsilon(f_S, f_I)(x, t)$ est le taux d'incidence locale définie par

$$K_\epsilon(f_S, f_I)(x, t) = f_S(x, t) \int_{\mathbb{R}_+} \kappa_\epsilon(x, y) f_I(y, t) dy,$$

- κ_ϵ est la fonction de contact, positive, croissante dans les deux variables avec $\kappa_\epsilon(\cdot, 0) = 0$
- les opérateurs intégrales Q_J , $J \in \{S, I, R\}$ caractérisent la thermalisation de la distribution des contacts sociaux dans les différentes classes. Ces opérateurs représentent la modification de la sociabilité des individus par leurs interactions.

On peut caractériser les opérateurs Q_J par leurs mesures contre une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) Q_J(f_J)(x, t) dx = \left\langle \int_{\mathbb{R}_+} B(x) (\varphi(x_J^*) - \varphi(x)) f_J(x, t) dx \right\rangle$$

où

- $\langle \cdot \rangle$ désigne l'espérance mathématique
- B est la fréquence des interactions
- x_J^* est la valeur mise à jour du nombre de contacts sociaux dans la catégorie J

2.2 La distribution des contacts sociaux

Dans cette partie, on étudie plus en détails les opérateurs Q_J en négligeant les termes d'échanges. On note $\bar{x}_M$ le nombre caractéristique de contacts sociaux dû aux habitudes de la population M . Cette valeur évolue dans le temps.

On prend la valeur mise à jour du nombre de contacts sociaux dans la catégorie J de la forme

$$x_J^* = x - \phi^\epsilon\left(\frac{x}{\bar{x}_J}\right)x + \eta_\epsilon(x)$$

où

- ϕ^ϵ désigne la variation prévisible de contacts sociaux
 - η_ϵ est une variable aléatoire d'espérance nulle, possédant des moments finis jusqu'à l'ordre 3 et telle que $\langle \eta_\epsilon^2 \rangle = \epsilon \lambda$ pour un certain $\lambda > 0$.
- On considère la fonction ϕ^ϵ de la forme

$$\phi_\delta^\epsilon(s) = \mu \frac{e^{\epsilon(s_\delta-1)/\delta} - 1}{e^{\epsilon(s_\delta-1)/\delta} + 1}, s \geq 0$$

où

- μ désigne la variation maximale en une interaction,
- $0 < \delta < 1$ est une constante caractérisant l'intensité du comportement individuel,
- $\epsilon > 0$ désigne l'intensité des interactions, on considère $\epsilon \ll 1$ ce qui correspond à de faibles variations de $\langle x_J^* - x \rangle$.

Le choix $\mu < 1$ assure que x_J^* hérite de la positivité de x en l'absence du terme aléatoire.

Proposition 1. *Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, on a*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) f_J(x, t) dx = \left\langle \int_{\mathbb{R}_+} B(x) (\varphi(x_J^*) - \varphi(x)) f_J(x, t) dx \right\rangle.$$

En considérant B de la forme $B(x) = x^{-b}$ et la proposition suivante, le choix $b = \delta$ correspond à un taux collectif de variation du système indépendant du paramètre δ caractérisant alors le taux individuel de variation de la fonction de valeur.

Proposition 2.

$$\frac{d}{dx} \phi_\delta^\epsilon \left(\frac{x}{\bar{x}_J} \right) \approx \mu \epsilon x^{\delta-1} \bar{x}_J^{-\delta}.$$

Démonstration. On pose pour tout réel s , $E(s) = e^{\epsilon(s^\delta-1)/\delta}$.

Par définition $\phi_\delta^\epsilon(s) = \mu \frac{E(s)-1}{E(s)+1}$, fonction infiniment dérivable car composée d'une exponentielle par une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Par dérivation, on a

$$\frac{d}{ds} \phi_\delta^\epsilon(s) = \mu \frac{2\epsilon s^{\delta-1} E(s)}{(E(s)+1)^2}.$$

Par la formule de Taylor-Young, on a $\frac{E(s)}{(E(s)+1)^2} = \frac{E(0)}{(E(0)+1)^2} + \frac{O}{s \rightarrow 0}(s)$. Or

$$\frac{E(0)}{(E(0)+1)^2} = \frac{e^{\epsilon/\delta}}{(1+e^{\epsilon/\delta})^2} = \frac{1}{4} + \frac{O}{\epsilon \rightarrow 0}(\epsilon).$$

D'où

$$\frac{d}{ds} \phi_\delta^\epsilon(s) = \mu \frac{\epsilon s^{\delta-1}}{2} + \frac{O}{s \rightarrow 0}(s^\delta) + \frac{O}{\epsilon \rightarrow 0}(\epsilon).$$

Finalement

$$\frac{d}{dx} \phi_\delta^\epsilon \left(\frac{x}{\bar{x}_J} \right) = \frac{1}{\bar{x}_J} \frac{d}{ds} \phi_\delta^\epsilon \left(\frac{x}{\bar{x}_J} \right) = \frac{\mu \epsilon x^{\delta-1} \bar{x}_J^{-\delta}}{2} + \frac{O}{x \rightarrow 0}(x^\delta) + \frac{O}{\epsilon \rightarrow 0}(\epsilon).$$

□

2.3 Mise à l'échelle

Afin de séparer l'échelle de temps de la propagation et l'échelle de temps sur laquelle agissent les phénomènes sociaux, on introduit le changement de variable $\tau = \varepsilon t$. On introduit ainsi $f_{J,\varepsilon}(x, \tau) = f_J(x, t)$

En négligeant les termes d'échanges, $f_{J,\varepsilon}$ vérifie, pour toute fonction test φ :

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx = \frac{1}{\varepsilon} \left\langle \int_{\mathbb{R}_+} B(x) (\varphi(x_J^*) - \varphi(x)) f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx \right\rangle.$$

Nous allons ensuite étudier le comportement asymptotique de $\frac{1}{\varepsilon} (\varphi(x_J^*) - \varphi(x))$ lorsque ε tend vers 0.

On a d'abord les limites finies suivantes : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \phi_\delta^\varepsilon\left(\frac{x}{x_J}\right) = \frac{\mu}{2\delta} \left[\left(\frac{x}{x_J}\right)^\delta - 1 \right]$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \langle \eta_\varepsilon^2 \rangle = \lambda$.

Par la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction test φ au point x , il existe $\widehat{x_J}$ compris entre x et $\overline{x_J}$ tel que

$$\varphi(\overline{x_J}) - \varphi(x) = (\overline{x_J} - x) \varphi'(x) + \frac{1}{2} (\overline{x_J} - x)^2 \varphi''(x) + \frac{1}{6} (\overline{x_J} - x)^3 \varphi'''(\widehat{x_J}).$$

Proposition 3. *Pour tout $J \in \{S, I, R\}$, $f_{J,\varepsilon}$ vérifie*

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx = \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{\mathbb{R}_+} -\phi_\delta^\varepsilon\left(\frac{x}{x_J}\right) x^{1-\delta} \varphi'(x) f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx + \frac{\lambda \varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi''(x) x^{2-\delta} f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx \right] + R_\varphi(f_{J,\varepsilon}).$$

Démonstration. Comme $\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx = \frac{1}{\varepsilon} \left\langle \int_{\mathbb{R}_+} B(x) (\varphi(x_J^*) - \varphi(x)) f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx \right\rangle$, le développement de Taylor de φ assure que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx &= \frac{1}{\varepsilon} \left\langle \int_{\mathbb{R}_+} B(x) \left[(\overline{x_J} - x) \varphi'(x) + \frac{1}{2} (\overline{x_J} - x)^2 \varphi''(x) + \frac{1}{6} (\overline{x_J} - x)^3 \varphi'''(\widehat{x_J}) \right] f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx \right\rangle \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{\mathbb{R}_+} -\phi_\delta^\varepsilon\left(\frac{x}{x_J}\right) x^{1-\delta} \varphi'(x) f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} (\phi_\delta^\varepsilon\left(\frac{x}{x_J}\right))^2 x^{2-\delta} \varphi''(x) f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \lambda \varepsilon x^{2-\delta} \varphi''(x) f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}_+} \left\langle (\eta_\varepsilon - \phi_\delta^\varepsilon\left(\frac{x}{x_J}\right))^3 \right\rangle x^{3-\delta} \varphi'''(\widehat{x_J}) f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx \right]. \end{aligned}$$

D'où le résultat, en notant

$$R_\varphi(f_{J,\varepsilon}) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_+} \left[(\phi_\delta^\varepsilon\left(\frac{x}{x_J}\right))^2 \varphi''(x) + \frac{x}{3} \left\langle (\eta_\varepsilon - \phi_\delta^\varepsilon\left(\frac{x}{x_J}\right))^3 \right\rangle \varphi'''(\widehat{x_J}) \right] x^{2-\delta} f_{J,\varepsilon}(x, \tau) dx.$$

□

Proposition 4. *Le reste $R_\varphi(f_{J,\epsilon})$ tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0.*

Démonstration. Comme φ est une fonction test, on considère $K > 0$ tel que $\text{Supp}(\varphi) \subset [-K, K]$ et comme η_ϵ a un moment borné d'ordre 3, on considère $M_3(\epsilon)$ tel que $\langle \eta_\epsilon^3 \rangle \leq M_3(\epsilon)$.

$$R_\varphi(f_{J,\epsilon}) = \frac{1}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}_+} \left[(\phi_\delta^\epsilon(\frac{x}{x_J}))^2 \varphi''(x) + \frac{x}{3} \left\langle (\eta_\epsilon - \phi_\delta^\epsilon(\frac{x}{x_J}))^3 \right\rangle \varphi'''(\widehat{x_J}) \right] x^{2-\delta} f_{J,\epsilon}(x, \tau) dx.$$

D'une part $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \phi_\delta^\epsilon(\frac{x}{x_J}) = \frac{\mu}{2\delta} \left[\left(\frac{x}{x_J} \right)^\delta - 1 \right]$, donc $\frac{x^{2-\delta}}{2\epsilon^2} (\phi_\delta^\epsilon(\frac{x}{x_J}))^2 \varphi''(x)$ admet une limite finie lorsque ϵ tend vers 0, elle même majorée par $K^{-\delta} (\frac{K\mu}{2\delta})^2 ((\frac{K}{x_J})^\delta - 1)^2 \|\varphi''\|_\infty$. Finalement

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}_+} x^{2-\delta} (\phi_\delta^\epsilon(\frac{x}{x_J}))^2 \varphi''(x) f_{J,\epsilon}(x, \tau) dx = 0.$$

D'autre part $\langle (\eta_\epsilon - \phi_\delta^\epsilon(\frac{x}{x_J}))^3 \rangle = \langle \eta_\epsilon^3 \rangle - 3\phi_\delta^\epsilon(\frac{x}{x_J}) \langle \eta_\epsilon^2 \rangle + \phi_\delta^\epsilon(\frac{x}{x_J})^3$.

- $\frac{x^{3-\delta}}{2\epsilon^3} (\phi_\delta^\epsilon(\frac{x}{x_J}))^3 \varphi'''(\widehat{x_J})$ admet une limite finie lorsque ϵ tend vers 0, elle même majorée par $K^{-\delta} (\frac{K\mu}{2\delta})^3 ((\frac{K}{x_J})^\delta - 1)^3 |\varphi'''(\widehat{x_J})|$.
- $\frac{x^{3-\delta}}{2\epsilon^2} \phi_\delta^\epsilon(\frac{x}{x_J}) \langle \eta_\epsilon^2 \rangle \varphi'''(\widehat{x_J})$ admet une limite finie lorsque ϵ tend vers 0, elle même majorée par $K^{3-\delta} \frac{\lambda\mu}{2\delta} ((\frac{K}{x_J})^\delta - 1) |\varphi'''(\widehat{x_J})|$.
- Pour un modèle de type faible interaction, on peut supposer que les moments d'ordre 3 se comportent en $\langle \eta_\epsilon^3 \rangle = O(\epsilon^{3/2})$. On a alors $\frac{\langle \eta_\epsilon^3 \rangle}{\epsilon} = O(\epsilon^{1/2})$. Ainsi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x^{3-\delta}}{6\epsilon} \langle \eta_\epsilon^3 \rangle \varphi'''(\widehat{x_J}) f_{J,\epsilon}(x, \tau) dx = 0.$$

□

On en déduit que $f_{J,\epsilon}$ tend vers f_J et que f_J vérifie, par passage à la limite sur ϵ :

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) f_J(x, \tau) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \left(-\frac{\mu x^{1-\delta}}{2\delta} \left[\left(\frac{x}{x_J} \right)^\delta - 1 \right] \varphi'(x) + \frac{\lambda}{2} \varphi''(x) x^{2-\delta} \right) f_J(x, \tau) dx.$$

Puisque x est positif, on impose une condition de non-flux en $x = 0$. Afin de faciliter le calcul qui suit, on impose

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^{2-\delta} f_J(x, \tau)) \Big|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

L'équation limite correspond à l'équation de Fokker-Planck : $\frac{\partial}{\partial \tau} f_J(x, \tau) = Q_J^\delta(f_J)(x, \tau)$, où

$$Q_J^\delta(f_J)(x, \tau) = \frac{\mu}{2\delta} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{1-\delta} \left[\left(\frac{x}{x_J} \right)^\delta - 1 \right] f_J(x, \tau) \right) + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^{2-\delta} f_J(x, \tau)).$$

Proposition 5. *Supposons la masse initiale égale à 1 et $\overline{x_J}$ constant, alors en notant $\nu = \mu/\lambda$, l'équation admet un état d'équilibre $f_J^\infty(x) = C(\overline{x_J}, \delta, \nu) x^{\nu/\delta + \delta - 2} \exp\left(-\frac{\nu}{\delta^2} \left(\frac{x}{x_J}\right)^\delta\right)$, où C_J est une constante de renormalisation.*

Démonstration. Soit f_J^∞ une solution stationnaire. Alors $\frac{d}{dx} \left[\frac{\nu}{\delta} x^{1-\delta} \left(\left(\frac{x}{\overline{x}_J} \right)^\delta - 1 \right) f_J^\infty(x) + \frac{d}{dx} (x^{2-\delta} f_J^\infty(x)) \right] = 0$. Il existe donc une constante C telle que $\frac{\nu}{\delta} x^{1-\delta} \left(\left(\frac{x}{\overline{x}_J} \right)^\delta - 1 \right) f_J^\infty(x) + \frac{d}{dx} (x^{2-\delta} f_J^\infty(x)) = C$, or la condition initiale imposée implique qu'en 0, on a $C = 0$.

Notons $g : x \mapsto x^{2-\delta} f_J^\infty(x)$. Alors g est solution de $y' = h(x)y$ avec $h(x) = -\frac{\nu}{\delta x} \left(\left(\frac{x}{\overline{x}_J} \right)^\delta - 1 \right)$. Soit $H_c(x) = \frac{\nu}{\delta} [\ln(x) - \frac{1}{\delta} \left(\frac{x}{\overline{x}_J} \right)^\delta] + c$ une primitive de h . Puisque $g(x) = \exp(\frac{c\nu}{\delta}) x^{\nu/\delta} \exp(-\frac{\nu}{\delta^2} \left(\frac{x}{\overline{x}_J} \right)^\delta)$. Quitte à renormaliser, on a le résultat $f_J^\infty(x) = \exp(\frac{c\nu}{\delta}) x^{\nu/\delta + \delta - 2} \exp(-\frac{\nu}{\delta^2} \left(\frac{x}{\overline{x}_J} \right)^\delta)$. $\square$

On peut le réécrire sous la forme d'une densité de probabilité Gamma généralisée par $f_{J,\infty}(x; \theta, \chi, \delta) = \frac{\delta}{\theta^\chi} \frac{1}{\Gamma(\chi/\delta)} x^{\chi-1} \exp\left(-\frac{\nu}{\delta^2} \left(\frac{x}{\overline{x}_J} \right)^\delta\right)$ où $\chi = \nu/\delta + \delta - 1$ et $\theta = \overline{x}_J \left(\frac{\delta^2}{\nu} \right)^{1/\delta}$.

Remarquons l'équivalence entre $\chi \leq 0$ et $\nu \leq \delta(1 - \delta)$. De plus, la seconde inégalité est vraie lorsque $\lambda \leq 4\mu$.

3 Dynamique macroscopique

3.1 Dérivation de systèmes basés sur les moments

Supposons que la vitesse de formation des contacts sociaux est plus élevée que la vitesse de propagation de l'épidémie, ce qui correspond à considérer $\gamma_\epsilon = \gamma\epsilon$ et $\beta_\epsilon = \beta\epsilon$.

Ainsi, le système d'évolution peut s'écrire

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} f_S(x, \tau) = -K(f_S, f_I)(x, \tau) + \frac{1}{\epsilon} Q_S^\delta(f_S)(x, \tau) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} f_I(x, \tau) = K(f_S, f_I)(x, \tau) - \gamma f_I(x, \tau) + \frac{1}{\epsilon} Q_I^\delta(f_I)(x, \tau) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} f_R(x, \tau) = \gamma f_I(x, \tau) + \frac{1}{\epsilon} Q_R^\delta(f_R)(x, \tau) \end{cases} \quad (5)$$

avec la condition au bord 4.

Étant donné que le terme en Γ dépend de deux paramètres, on peut choisir $\delta = 1$ impliquant que $\chi = \nu$ et $\theta = \frac{\overline{x}_J}{\nu}$. Dans ce cas

$$Q_J^1(f_J)(x, \tau) = \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\left(\frac{x}{\overline{x}_J} \right) - 1 \right] f_J(x, \tau) \right) + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x f_J(x, \tau))$$

et

$$f_{J,\infty}(x; \theta, \nu) = \left(\frac{\nu}{\overline{x}_J} \right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\chi)} x^{\nu-1} \exp\left(-\frac{\nu}{\overline{x}_J} x\right)$$

Dans ce cas on a les moments suivants

$$\int_{\mathbb{R}_+} x f_J^\infty(x; \theta, \nu) dx = \overline{x}_J; \quad \int_{\mathbb{R}_+} x^2 f_J^\infty(x; \theta, \nu) dx = \frac{1 + \nu}{\nu} \overline{x}_J.$$

Par intégration du système d'évolution, les fractions des populations vérifient alors

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} S(\tau) = -\beta x_S(\tau) x_I(\tau) S(\tau) I(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} I(\tau) = \beta x_S(\tau) x_I(\tau) S(\tau) I(\tau) - \gamma I(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} R(\tau) = \gamma I(\tau) \end{cases} \quad (6)$$

Les moyennes locales vérifient

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} x_S(\tau) = -\frac{\beta}{\nu} x_S(\tau)^2 x_I(\tau) I(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} x_I(\tau) = \beta x_S(\tau) x_I(\tau) S(\tau) \left(\frac{1+\nu}{\nu} x_S(\tau) - x_I(\tau) \right) \\ \frac{d}{d\tau} x_R(\tau) = \gamma \frac{I(\tau)}{R(\tau)} (x_I(\tau) - x_R(\tau)) \end{cases} \quad (7)$$

Démonstration. En multipliant l'équation 5 par x puis en intégrant, on obtient

$$\frac{d}{d\tau}(S(\tau)x_S(\tau)) = -\beta x_I(\tau)I(\tau) \int_{\mathbb{R}_+} x^2 f_S(x, \tau) dx + 0.$$

Puisque l'opérateur de Fokker-Planck préserve les moments, on admet que comme dans le cas stationnaire, on a $\int_{\mathbb{R}_+} x^2 f_S(x, \tau) dx = \frac{1+\nu}{\nu} x_S(\tau)^2$. Finalement, on a

$$S(\tau) \frac{d}{d\tau} x_S(\tau) = -\beta \frac{1+\nu}{\nu} x_S(\tau)^2 x_I(\tau) I(\tau) S(\tau) - x_S(\tau) \frac{d}{d\tau} S(\tau).$$

Les équations pour x_I et x_R se calculent de même. $\square$

On appelle ce système de six équations le modèle Social-SIR (S-SIR). Remarquons que $\frac{d}{d\tau} x_S(\tau) < 0$ impliquant une décroissance stricte du nombre moyen de contacts sociaux dans la population susceptible. De plus, puisque $\frac{1+\nu}{\nu} > 1$ et que $x_S(0) > x_I(0)$, au début de l'épidémie, le nombre de contacts sociaux chez la population infectée croît rapidement, ce comportement peut sembler contradictoire mais il s'explique facilement par le fait que les personnes infectées le plus vite sont celles les plus sociables, augmentant de fait la moyenne.

Observons que le système est dans un état stationnaire si et seulement si $I = 0$ et $x_I = \frac{1+\nu}{\nu} x_S$.

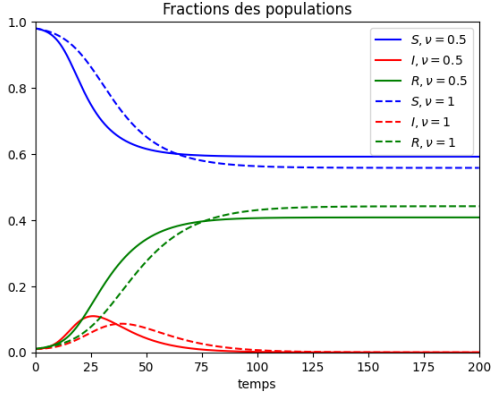


FIGURE 3 – Évolution des populations

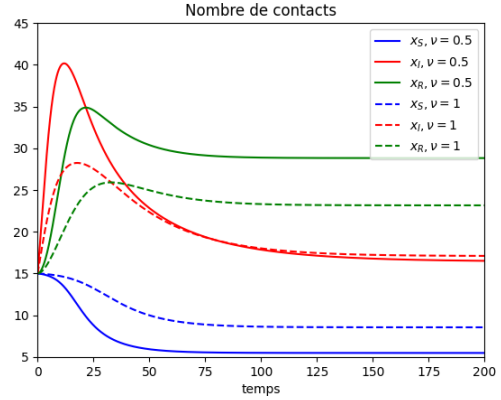


FIGURE 4 – Évolution des contacts

FIGURE 5 – Modélisation du système S-SIR avec $\beta = 0.0005$, $\gamma = 0.1$, $S_0 = 0.98$, $I_0 = R_0 = 0.01$ et $x_{S0} = x_{I0} = x_{R0} = 15$

3.2 Modèle social avec taux d'incidence saturé

Considérons que sous l'effet d'un confinement, le nombre de contacts sociaux des personnes infectées est constant : $x_I(\tau) = \tilde{x}_I$. Dans ce cas x_S vérifie $\frac{d}{d\tau} x_S(\tau) = -\frac{\beta}{\nu} x_S(\tau)^2 \tilde{x}_I I(\tau)$ dont l'unique solution est donnée par

$$x_S(\tau) = \frac{x_S(0)}{1 + \frac{\beta}{\nu} x_S(0) \tilde{x}_I \int_0^\tau I(s) ds}.$$

Par conséquent, en notant $\bar{\beta} = \beta x_S(0)\tilde{X}_I$ et $H(r, \tau) = \frac{1}{1 + \frac{\bar{\beta}}{\nu} x_S(0)\tilde{x}_I \int_0^\tau r(s) ds}$ le système 6 s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} S(\tau) = -\bar{\beta} S(\tau) I(\tau) H(I, \tau) \\ \frac{d}{d\tau} I(\tau) = \bar{\beta} S(\tau) I(\tau) H(I, \tau) - \gamma I(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} R(\tau) = \gamma I(\tau) \end{cases} \quad (8)$$

Notons $D(S(\tau), I(\tau)) = -\frac{d}{d\tau} S(\tau)$.

Proposition 6. *On admet que pour tout $S, I > 0$, $D(S, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial S} D(S, I) > 0$, $\frac{\partial}{\partial I} D(S, I) > 0$ et $\frac{\partial^2}{\partial I^2} D(S, I) \leq 0$.*

Dans ce cas, la reproductivité s'écrit $\mathcal{R}_0 = \frac{1}{\gamma} \lim_{S \rightarrow 1, I \rightarrow 0} D(S, I) = \frac{\bar{\beta}}{\gamma}$, ce qui correspond au modèle SIR classique.

Références

- [1] Nicolas BACAËR. *Mathématiques et épidémies*. Cassini, 2021, 320 pages. URL : <https://hal.science/hal-03331469>.
- [2] Giacomo DIMARCO et al. « Kinetic models for epidemic dynamics with social heterogeneity ». In : *Journal of Mathematical Biology* 83.1 (juin 2021), p. 4. DOI : 10.1007/s00285-021-01630-1. URL : <https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-03272232>.
- [3] Riccardo MUOLO et al. « Turing patterns on discrete topologies : from networks to higher-order structures ». In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 480.2302 (nov. 2024). ISSN : 1471-2946. DOI : 10.1098/rspa.2024.0235. URL : <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2024.0235>.